

## Marx e o cálculo infinitesimal, uma análise dos processos de formação dos preços em O Capital

Benedito Silva Neto

### Resumo

A identificação do cálculo diferencial e integral com a economia neoclássica é um dos principais motivos da sua rejeição pelos marxistas. No entanto, Marx estudou de maneira intensa o cálculo diferencial e integral durante várias décadas. Neste trabalho analisamos algumas características dos estudos de Marx sobre o cálculo e, após, procuramos demonstrar que a sua aplicação não apresenta contradição com as concepções econômicas fundamentais de Marx, não levando a convergência do marxismo com a escola neoclássica. Para evidenciar estas hipóteses é realizada uma análise dos processos de formação dos preços propostos por Marx no Capital. Conclui-se que a aplicação do cálculo diferencial e integral e técnicas a ele relacionadas não implicaram na convergência entre o pensamento de Marx e as concepções neoclássicas. No entanto, tal análise indica a possibilidade de importantes contradições no Capital, embora reforçando o sentido crítico da obra de Marx em relação ao capitalismo.

**Palavras-chave:** marginalismo, economia marxista, cálculo econômico.

### Introdução

O cálculo diferencial e integral, muitas vezes designado sinteticamente como cálculo infinitesimal, ou simplesmente “cálculo”, como geralmente é designado em cursos universitários, se constitui em uma área da matemática cujas técnicas são comumente empregadas pela economia neoclássica, especialmente para a realização de cálculos “à margem” ou “marginalistas”. A importância do cálculo na escola neoclássica é de tal magnitude que esta corrente do pensamento econômico é muitas vezes denominada escola marginalista, sendo o seu surgimento também conhecido como Revolução Marginalista. Esta identificação do cálculo com a economia neoclássica é um dos principais motivos da sua forte rejeição pelos marxistas.

Além disto, parece haver entre os marxistas a crença de que a aplicação do cálculo aos estudos econômicos se limita estritamente ao problema da escassez, tal como ele é tratado na escola neoclássica, na qual ele é considerado como o objeto por excelência da economia (STIGLITZ e WALSH, 2003, p. 174). Por isto, o cálculo não seria compatível com as teorias de Marx, as quais pressupõem a consideração da economia a partir de uma perspectiva histórica, muito mais

abrangente do que a proposta pelos neoclássicos. Neste sentido, há certa preocupação entre os marxistas de que a aplicação do cálculo na análise econômica provocaria uma “contaminação” da teoria marxista com concepções neoclássicas, ou até mesmo uma convergência com elas. Esta hipótese é reforçada pela possibilidade, já declarada por um dos pioneiros da escola neoclássica (JEVONS, 1879, prefácio), do emprego da “desutilidade” do trabalho no lugar da utilidade dos produtos (que, ao contrário do tempo de trabalho, não é mensurável) para fundamentar a teoria do valor neoclássica. Efetivamente, há trabalhos que, adotando esta abordagem hedonista do trabalho, indicam claramente esta convergência, apesar do objetivo de consolidar a teoria marxista do valor com base no cálculo diferencial (HAGENDORF, 2010, 2014).

No entanto, Marx estudou cálculo de maneira intensa durante, pelo menos, as duas décadas imediatamente anteriores à sua morte, havendo especulações de que ele a partir destes estudos pretendia revisar os aspectos matemáticos dos livros II e III do *Capital* antes de publicá-los (ALCOUFFE, 1985). Neste artigo não pretendemos produzir evidências de que Marx pretendia aplicar o cálculo para a revisão de algumas das suas obras. Por outro lado, independentemente de Marx ter tido esta intenção, a consideração desta hipótese nos parece válida. Diante disto, é interessante os termos nos quais ALCOUFFE (1985, p. 38) formula esta questão,

“Nós não pensamos que podemos escapar facilmente à alternativa seguinte: seja se limitar a letra de Marx e recusar as matemáticas, seja admitir o projeto marxiano de aplicar as matemáticas a economia e aceitar a liberdade de pesquisa em economia implicando ‘revisões’ eventuais mais ou menos importantes em relação à letra de Marx.”<sup>1</sup>

Neste artigo é adotada a segunda atitude descrita acima. Isto porque consideramos que ela é a única que permite avanços do conhecimento científico a partir do excepcional legado de Marx. Neste sentido, procuramos demonstrar que a aplicação do cálculo, por si mesma, não apresenta qualquer contradição com as concepções de Marx da economia, podendo contribuir significativamente para a sua consolidação. Além disto, procuramos mostrar que uma aplicação rigorosa do cálculo à análise econômica com base no materialismo histórico não leva a qualquer convergência do marxismo com a escola neoclássica. Para evidenciar estas hipóteses, é realizada uma análise da formação dos preços (questão que se constitui em uma preocupação central da economia neoclássica) a partir de concepções expressas por Marx no *Capital*.

Este artigo está organizado em duas partes, além desta introdução e das conclusões. Na primeira parte é realizada uma discussão das possíveis motivações da dedicação de Marx ao estudo

---

1 “Nous ne pensons pas que l’on puisse échapper facilement à l’alternative suivante: soit s’en tenir à la lettre de Marx et refuser les mathématiques, soit admettre le projet marxien d’appliquer les mathématiques à l’économie et accepter la liberté de recherche en économie impliquant de «revisions» éventuelle plus ou moins importantes par rapport à la lettre de Marx.”

do cálculo, assim como uma breve análise da abordagem por ele adotada nesses estudos. Na segunda são examinados os processos de formação dos preços propostos no *Capital* com base no cálculo e na programação linear, procurando-se cotejar as concepções de Marx com algumas das sustentadas pela economia neoclássica.

### **Marx e o cálculo diferencial e integral**

Preliminarmente, é importante registrar que não ignoramos a existência de vários trabalhos que procuram aplicar técnicas matemáticas mais recentes para a análise das teorias de Marx relacionadas à formação dos preços. Destacam-se, neste sentido, os trabalhos que se dedicam à aplicação do cálculo de autovalores para a solução do problema da transformação de valores em preços, tal como inaugurado por SRAFFA (1963), e da programação linear (que como veremos na segunda seção, proporciona resultados equivalentes ao do cálculo) para a análise da teoria do valor marxista, tal como proposto por MORISHIMA (1973). No entanto, tais trabalhos são fortemente condicionados por uma problemática de caráter ricardiano, estranha ao marxismo, pois totalmente alheia a perspectiva histórica e materialista adotada por Marx. Diante disto, não é de admirar que os resultados desses trabalhos sejam ambíguos, quando não francamente contraditórios, em relação ao pensamento de Marx (HOWARD, 2011, p. 142-177; HUSSON, 2014).

Como já mencionado, Marx estudou cálculo durante várias décadas. No entanto, não é possível detectar qualquer aplicação direta de tal conhecimento nas obras de Marx, inclusive as relacionadas à economia. Há várias hipóteses para explicar este aparente paradoxo. Uma delas é que, embora Marx tivesse a intenção de realizar uma revisão geral dos aspectos matemáticos do *Capital*, diante das evidências de que tal revisão o levaria a modificar o seu conteúdo, especialmente dos livros II e III, até então não publicados, e estando doente e abatido pela morte da esposa, desiste da ideia, entregando os manuscritos à Engels para que ele deles “fizesse alguma coisa” (ALCOUFFE, 1985, p. 38). É interessante observar o contraste desta atitude em relação ao extremo zelo que Marx dispensou à publicação e às traduções do livro I do *Capital*. Além disto, é fato conhecido que Marx já havia preparado boa parte dos livros II e III do *Capital* anos antes da publicação do livro I (ALCOUFFE, 1985, p. 38). Tudo isto indica a insatisfação de Marx em relação aos dois últimos livros do *Capital*, os quais só foram publicados por Engels após a sua morte.

Outra hipótese, compatível com a anterior, propõe que Marx intensifica os seus estudos de cálculo nos anos 1870 para avaliar a abordagem econômica de Jevons (SMOLINSKI, 1973). No entanto, não é possível identificar qualquer relação dos estudos do cálculo efetuados por Marx com a análise econômica, e especialmente com o problema da escassez, realizada pela então nascente

escola neoclássica. O que é evidente é que o interesse de Marx se restringia quase exclusivamente aos fundamentos do cálculo, os quais ele considerava altamente insatisfatórios.

Uma hipótese unificadora das anteriores é que Marx efetivamente tinha a intenção de revisar os aspectos matemáticos dos livros II e III do Capital, considerando as concepções de Jevons, o que explicaria o seu interesse pelo cálculo. No entanto, considerando as abordagens da época pouco consistentes, teria passado a se dedicar à sua fundamentação. Após décadas de estudo, não conseguindo atingir seu objetivo, o que o teria impossibilitado de sequer a iniciar a revisão, teria perdido o interesse pela publicação dos livros II e III do Capital, entregando-os à Engels. Isto explicaria porque Marx, mesmo que preliminarmente (como em geral ele fazia intensamente com qualquer assunto), jamais procurou aplicar o cálculo à análise econômica.

É interessante, pois, expor alguns aspectos da abordagem adotada por Marx do cálculo. Ocorre que esta área da matemática foi assunto de intensa polêmica desde o seu surgimento a partir de Newton e Leibniz no século XVII até as primeiras décadas do século XIX, quando, com o desenvolvimento da noção de limite, o cálculo assume a sua forma atual (SERMAN, 2013). O problema central encontrava-se na noção de infinitesimal que, durante longo período, parecia impossível de ser claramente relacionada com a matemática elementar. O conceito do infinitamente pequeno e do infinitamente grande parecia violar o fundamento da matemática, enunciado por Euclides, segundo o qual o todo é maior do que a parte (SERMAN, 2013). Foi neste contexto que Hegel desenvolve uma interpretação do cálculo diferencial que exercerá uma grande influência sobre Marx. Identificando a noção de infinitesimal com a sua concepção idealista do infinito, para Hegel a derivação representa um processo dialético que envolve não apenas quantidades, mas também mudanças qualitativas. Por isto, Hegel argumentava que a noção de infinitesimal não poderia ser justificada matematicamente, mas isto exigia o recurso à filosofia (KOLMAN e YANOVSKAYA, 1931).

É a partir das concepções de Hegel que Marx aborda o estudo do cálculo (ALCOUFFE, 1985). Marx retém a concepção de Hegel sobre a natureza dialética do processo de derivação, considerando que esta operação implica em mudanças qualitativas, como atesta uma carta recebida de Engels em 21 de novembro de 1882 que, após ler um trabalho de Marx, comenta que,

“tu fazes passar  $x$  em  $x'$ , fazendo-o efetivamente variar enquanto que outros partem de  $x + h$ , o que representa sempre uma soma de duas grandezas, mas jamais a variação de uma grandeza. É porque seu  $x$ , mesmo que ele passe por  $x'$  e volta ao primeiro,  $x$  é no entanto outro em relação ao que ele era inicialmente; enquanto que, se adiciona-se primeiro  $h$  a  $x$  e que o retire em seguida,  $x$  permanece todo o tempo constante.”<sup>2</sup> (ALCOUFFE, 1985, p. 7)

2 “tu fais passer  $x$  en  $x'$ , le faisant effectivement varier tandis que les autres partent de  $x + h$ , ce qui représente toujours une somme de deux grandeurs, mais jamais la variation d'une grandeur. C'est pourquoi ton  $x$ , même s'il passe par  $x'$  et revient au premier,  $x$  est néanmoins autre que ce qu'il était initialement; tandis que, si on ajoute

Marx, porém, rejeitava a afirmação de Hegel de que a derivação não pode ser fundamentada a partir da matemática elementar. É a esta tarefa que ele se dedica, tomando a álgebra elementar como ponto de partida. Marx, assim, rejeita a noção de infinitesimal, assim como a abordagem geométrica, criticando os fundadores do cálculo, como atesta o seguinte trecho extraído de uma carta enviada à Engels em 21 de novembro de 1882:

“o que se denomina precisamente o método diferencial – que começa com o método místico de Newton e Leibniz, prosseguindo com o método racionalista de D’Alembert e de Euler, se completa com o método estritamente algébrico de Lagrange (que parte sempre no entanto do mesmo ponto de vista fundamental e original de Newton e Leibniz) – eu poderia balançar no final da análise todo este desenvolvimento histórico, dizendo que nada tem, em essência, praticamente mudado no que concerne a aplicação geométrica do cálculo diferencial, quer dizer de lhe tornar sensível geometricamente.”<sup>3</sup> (ALCOUFFE, 1985, p. 8)

Em seus manuscritos matemáticos Marx demonstra possuir uma compreensão sofisticada do cálculo (SERMAN, 2013), embora suas tentativas de demonstração, sempre baseadas em exemplos numéricos relativamente simples, careçam de generalidade (GRANDE e SMILGYS, 2018). Particularmente delicada é a atribuição de um caráter dialético à derivação, sobretudo quando Marx faz uma alusão a “negação da negação”, citada em uma (única) passagem dos seus manuscritos, quando ele apresenta a sua interpretação do cálculo por meio do seguinte exemplo da derivação da função afim,

$$y = ax \quad (1)$$

considerando que se  $(x)$  cresce para  $(x1)$ ,  $y$  cresce para  $(y1)$ , ou seja,

$$(y1 - y) = a(x1 - x) \quad (2)$$

A operação diferencial, segundo Marx, fazendo  $(x1)$  decrescer até  $x$ , resultaria em  $(x1 - x = 0)$ , que substituindo na expressão 1, resultaria,

$$a0 = 0 \quad (3)$$

Da mesma forma, sendo  $(y1 - y = 0)$ , o que substituído na expressão 3, resultaria em  $(0 = 0)$ .

Sobre este resultado, Marx comenta,

“Introduzir em um primeiro momento a diferenciação e em um segundo momento fazê-la desaparecer não leva literalmente a *nada*. Toda dificuldade para compreender a operação de diferenciação (grosso modo, como na *negação da negação*) consiste precisamente a ver

---

d’abord h à x et qu’on l’enlève ensuite, x reste tout le temps constant.

3 “ce que l’on appelle précisément la méthode différentielle – qui commence avec la méthode mystique de Newton et Leibniz, se poursuit avec la méthode rationaliste de D’Alembert et d’Euler, s’achève avec la méthode strictement algébrique de Lagrange (qui par toujours cependant du même point de vue fondamental et originel que Newton et Leibniz – je pourrais balancer la fin de l’analyse de tout ce développement historique, en disant que rien n’a, en essence, pratiquement changé en ce qui concerne l’application géométrique du calcul différentiel c.à.d. de le rendre sensible géométriquement.”

como ela se distingue deste procedimento simples e conduz assim a resultados efetivos”.<sup>4</sup> (MARX, 1985, p. 115, itálicos no original)

Marx então prossegue, considerando,

$$\frac{(y-1-y)}{(x-1-x)} = a \quad (4)$$

que resulta em,

$$\frac{0}{0} = a \quad (5)$$

Neste ponto Marx observa, porém, que esta relação diz respeito a diferenças finitas, e que portanto o resultado do quociente é a unidade e não zero. Assim, MARX (1985, p. 117) afirma que,

“Como na expressão  $\frac{0}{0}$  desaparece todo traço de sua origem e da sua significação nós a

substituímos por  $\frac{dy}{dx}$ ”<sup>5</sup>, expressando o resultado correto como,

$$\frac{dy}{dx} = a \quad (6)$$

Apesar de bastante engenhoso, o procedimento em que Marx faz alusão à negação da negação carece de fundamentação (GRANDE e SMILGYS, 2018). É evidente, também, que, de um ponto de vista puramente matemático, a atribuição de mudanças qualitativas provocadas pela diferenciação não pode ser considerada como demonstrada (GRANDE e SMILGYS, 2018). No entanto, vale ressaltar que a aplicação do cálculo em diversas áreas da ciência (desde a física até a economia) permite a análise de processos nos quais efetivamente ocorrem mudanças qualitativas. A intuição de Hegel, adotada por Marx, portanto, pode ser considerada válida para as aplicações do cálculo (embora, vale ressaltar, não existem bases para a sua aceitação de um ponto de vista matemático).

4 “Introduire dans un premier temps la différentiation et dans un deuxième temps la faire disparaître ne mène littéralement à *rien*. Toute la difficulté pour comprendre l’opération de différentiation (en gros, comme dans la *négation de la négation*) consiste précisément à voir *comment* elle se distingue de cette procédure simple et conduit de la sorte à des résultats effectifs.”

5 “Comme dans l’expression  $\frac{0}{0}$  disparaît toute trace de son origine et de sa signification, nous la remplaçons par  $\frac{dy}{dx}$ .”

## A formação dos preços no Capital

Inicialmente, é importante registrar que não ignoramos a existência de vários trabalhos que procuram aplicar técnicas matemáticas mais recentes para a análise de aspectos da obra de Marx relacionados a formação dos preços. Destacam-se, neste sentido, os trabalhos que se dedicam à aplicação do cálculo de autovalores para a solução do problema da transformação de valores em preços, tal como inaugurado por SRAFFA (1963), e da programação linear (que como veremos na segunda seção, proporciona resultados equivalentes ao do cálculo) para a análise da teoria do valor marxista, tal como proposto por MORISHIMA (1973). No entanto, tais trabalhos são fortemente condicionados por uma problemática de caráter ricardiano, estranha ao marxismo, pois totalmente alheia a perspectiva histórica e materialista adotada por Marx. Diante disto, não é de admirar que os resultados desses trabalhos sejam ambíguos, quando não francamente contraditórios, em relação ao pensamento de Marx (HOWARD, 2011, p. 142-177; HUSSON, 2014).

A abordagem que será desenvolvida neste artigo é distinta das indicadas anteriormente. Ela tem como ponto de partida a forma como Marx considera a oferta e a demanda na formação dos preços, que ele expressa no capítulo XX do livro III do Capital, afirmando que,

“Quando a oferta e a demanda coincidem, elas deixam de atuar, e precisamente por isso as mercadorias são vendidas por seu valor de mercado. Quando duas forças iguais atuam na mesma medida em sentidos opostos, elas se anulam reciprocamente, não exercem nenhum efeito externo, e os fenômenos que se produzem sob estas condições têm de ser explicados por causas alheias à intervenção dessas duas forças. Quando se anulam mutuamente, a oferta e a demanda já não explicam mais coisa nenhuma, não influem no valor de mercado e, com mais razão ainda, não nos ajudam a compreender por que o valor de mercado se expressa justamente nessa soma de dinheiro, e não em outra.” (MARX, 2017, p. 224)

Vale salientar que tal declaração contrasta com a concepção neoclássica, que atribui uma importância muito maior às relações quantitativas entre oferta e demanda na determinação dos preços. De acordo com o materialismo histórico, a demanda considerada é sobretudo como um produto da luta de classes e não o resultado de um processo propriamente econômico, como expresso na seguinte afirmação,

“Observemos aqui, apenas de passagem, que as “necessidades sociais”, isto é, aquilo que regula o princípio da demanda, encontram-se essencialmente condicionadas pela relação das diversas classes entre si e por sua respectiva posição econômica, ou seja, em primeiro lugar, pela proporção entre o mais-valor total e o salário; em segundo lugar, pela proporção entre as diversas partes nas quais se decompõe o mais-valor (lucro, juros, renda fundiária, impostos, etc). De modo que aqui novamente se demonstra que não se pode explicar absolutamente nada a partir da relação entre a oferta e a demanda, antes de estar desenvolvida a base sobre a qual opera esta relação.” (MARX, 2017, p. 216).

É importante salientar que esta concepção de Marx sobre a determinação de demanda por processos sociais objetivos fundados na luta de classes é de natureza completamente distinta da concepção neoclássica da demanda baseada em processos subjetivos de avaliação da utilidade dos produtos.

Assim, definida certa quantidade demandada, a oferta é determinada pelas condições em que ocorrem os processos de trabalho, cuja natureza é esclarecida por Marx quando ele diz que,

“Os valores de uso casaco, linho etc., em suma, os corpos das mercadorias, são nexos de dois elementos: matéria natural e trabalho. Subtraindo-se a soma total de todos os diferentes trabalhos úteis contidos no casaco, linho etc., o que resta é um substrato material que existe na natureza sem a interferência da atividade humana. Ao produzir, o homem pode apenas proceder como a própria natureza, isto é, pode apenas alterar a forma das matérias. Mais ainda: nesse próprio trabalho de formação ele é constantemente amparado pelas forças da natureza. Portanto, o trabalho não é a única fonte dos valores de uso que ele produz, a única fonte da riqueza material.” (MARX, 2011, p. 167)

Este trecho mostra a precisa concepção de Marx do processo de trabalho. Nele Marx deixa claro que o trabalho se constitui, essencialmente, na forma específica como os seres humanos se relacionam com a natureza para obter os produtos que necessitam. Os recursos naturais ocupam, portanto, uma posição central na concepção de Marx do trabalho. Por outro lado, é importante salientar que, na obra de Marx, o trabalho é sempre concebido como uma atividade realizada a partir de relações sociais, que nele desempenham um papel central. Em suma, pode-se inferir a partir da concepção exposta por Marx que o trabalho se constitui em uma relação dos seres humanos com a natureza (sempre) mediada por relações dos seres humanos entre si. Enfim, para Marx, o trabalho possui um caráter histórico, na medida em que as relações sociais se alteram ao longo do tempo, notadamente em consonância com o avanço das “forças produtivas” representadas pelo domínio que os seres humanos exercem sobre os processos naturais sobre os quais se baseia o trabalho.

O trabalho, portanto, ocupa um lugar central na concepção histórica e materialista da realidade inaugurada por Marx e Engels. É, portanto, compreensível que o tempo de trabalho requerido para a produção seja considerado por Marx como um fundamento essencial da economia, a partir do qual ele concebe a lei do valor, enunciada como,

“Independentemente do modo como estejam fixados ou regulados entre si os preços das diversas mercadorias, é a lei do valor que, num primeiro momento, rege seu movimento. Quando diminui o tempo de trabalho requerido para produzir essas mercadorias, os preços baixam; quando ele aumenta, os preços sobem, mantendo-se constantes as demais circunstâncias.” (MARX, 2011, p. 211).

Assim, pode-se considerar coerente com a teoria de Marx que a determinação da curva de oferta de um produto em relação aos seus preços seja definida pelo tempo de trabalho para a produção. Na origem de tal curva encontra-se o custo total em tempo de trabalho necessário para a geração de um produto, de acordo com as condições em que ocorre. Uma curva de custo total em tempo de trabalho em condições heterogêneas de produção, considerando uma variação contínua das mesmas, é mostrada na figura 1.

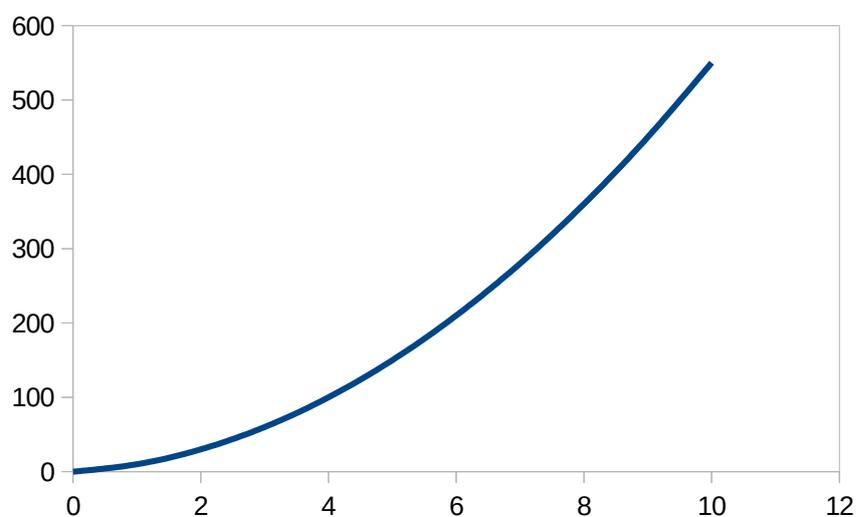


Figura 1: Custo total em tempo de trabalho em relação a quantidade produzida

Para produzir uma quantidade ( $q$ ), é necessário que o produtor com o maior custo receba uma remuneração proporcional ao tempo de trabalho aplicado. Assim, aparentemente, o custo total por unidade de produto, ou seja, o seu valor médio em tempo de trabalho, deveria corresponder ao preço. Provavelmente, este foi o raciocínio realizado por Marx. Este custo médio é descrito como,

$$c_m = \frac{c_t}{q} \quad (7)$$

onde,

$c_m$  = custo médio

$c_t$  = custo total

$q$  = quantidade do produto

É interessante observar que o valor médio de uma mercadoria gerada em diferentes condições de produção pode ser obtido por meio da equalização das taxas de lucro dos capitalistas de um mesmo ramo de produção. Assim, dado,

$cc$  = capital constante (meios de produção) por unidade de produto

$cv$  = capital variável (salários) por unidade de produto

O capital total por unidade de produto corresponde a,

$$K = cv + cc \quad (8)$$

Sendo a mais valia ( $m$ ) e a taxa de mais valia ( $t$ ) por unidade de produto

$$m = tK \quad (9)$$

E o valor da produção por unidade de produto,

$$v = m + K \quad (10)$$

E o preço, correspondente ao valor médio por unidade de produto definido como,

$$p = \frac{\sum_{i=1}^n v_i}{n} \quad (11)$$

Considerando ( $n$ ) capitais ( $K$ ) com diferentes composições orgânicas (ou seja, diferentes proporções entre ( $cv$ ) e ( $cc$ )), cada um gerando uma quantidade ( $q$ ) de produto, a soma dos valores é,

$$\sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n m_i + \sum_{i=1}^n K_i \quad (12)$$

Substituindo a mais valia pela sua taxa, de acordo com a expressão (9),

$$\sum_{i=1}^n v_i = K \sum_{i=1}^n t_i + \sum_{i=1}^n K_i \quad (13)$$

Considerando a média das taxas de mais valia ( $t_i$ ) como a taxa média de lucro ( $t$ ),

$$\sum_{i=1}^n v_i = t \sum_{i=1}^n K_i + \sum_{i=1}^n K_i \quad (14)$$

Sendo o preço médio obtido por

$$\frac{\sum_{i=1}^n v_i}{n} = (1+t) \frac{\sum_{i=1}^n K_i}{\sum_{i=1}^n q_i = p} \quad (15)$$

E o preço em cada condição de produção por,

$$(1+t) \frac{K_i}{q_i} = p_i \quad (16)$$

A igualdade entre o preço médio e o valor médio de um produto é, portanto, um resultado da equalização das taxas de lucro e não o seu ponto de partida. O processo econômico por meio do qual tal preço pode ser fixado pode ser pela definição de um “mark up” adicionado pelo capitalista ao capital investido com base na taxa média de lucro observada em seu ramo de produção (o que equivale a expressão 15). No entanto, os preços definidos em cada condição de produção, de acordo com a expressão (16) é específico a cada uma destas condições, devendo a quantidade das mercadorias geradas em cada condição de produção serem vendidas por estes preços para que, globalmente, as transferências de valores se anulem. É provavelmente por esta razão que Marx, no

capítulo X do livro III do Capital, afirma que os preços de produção “gravitam” em torno do valor médio, refutando a afirmação de Ricardo de que o preço seria definido pelas piores condições (o que, matematicamente implica que o preço equivaleria ao valor marginal).

Esta concepção de Marx da formação dos preços levanta uma série de dificuldades. Por exemplo, é difícil saber como os capitalistas conseguem saber qual é a taxa média de lucro especificamente do seu ramo de produção. Além disto, o processo de formação dos preços descrito por Marx não corresponde ao de uma estrutura de mercado de concorrência perfeita, na medida em que este impossibilita aos capitalistas definir o preço das suas mercadorias. Outro problema é que os capitalistas só podem definir os preços das suas mercadorias com base no custo de produção (capital investido) se estes já estiverem expressos em valores monetários (e não em tempo de trabalho) o que supõe um processo de formação dos preços anterior à equalização dos lucros. Enfim, é no valor médio, que ele denomina “valor de mercado” (MARX, 2017, p. 212), que Marx pensou encontrar o ponto em que o preço define a mesma quantidade ofertada e demandada, assegurando uma reprodução estável do sistema econômico, o que é afirmado na seguinte citação,

“se o volume do trabalho social corresponde a demanda a ser satisfeita, de modo que, mantendo-se inalterada a demanda, a massa produzida corresponda à escala habitual da reprodução, então a mercadoria será vendida por seu valor de mercado. (MARX, 2017, p. 222)

É isto que ele parece querer demonstrar por meio dos exemplos numéricos discutidos no capítulo IX e na discussão sobre as relações entre oferta e demanda realizada ao longo do capítulo X do livro III do Capital. Além disto, Marx propõe a equalização das taxas de lucro como o processo por excelência de formação dos preços no capitalismo, mesmo entre ramos de produção diversos e com diferentes taxas de rotação do capital fixo, o que complica ainda mais a sua demonstração. Tal equalização ocorreria por meio da transferência de capitais entre os ramos de produção, como indica a seguinte citação,

“Ocorre que, se as mercadorias fossem vendidas por seus valores, haveria, como já foi exposto, taxas de lucro muito diversas nas diversas esferas da produção, segundo a composição orgânica das massas de capital nelas investidas. Mas o capital é retirado de uma esfera de produção com taxa de lucro menor e lançado em outra, que gera lucros maiores. Mediante essa constante emigração e imigração, numa palavra, mediante sua distribuição entre as diversas esferas, conforme em cada uma delas sua taxa de lucro diminua e, em outra, aumente, o capital engendra uma relação entre oferta e demanda de tal natureza que o lucro médio nas diversas esferas da produção torna-se o mesmo e, por conseguinte, os valores se transformam em preços de produção.” (MARX, 2017, p. 231).

É interessante observar que Marx, apegando-se a noção de que os preços variam em torno do valor de mercado (como ele denomina o valor médio), afirma que,

“De nada adianta dizer que a venda das mercadorias produzidas sob as piores condições é uma demonstração de que essas mercadorias são necessárias para cobrir a demanda.” (MARX, 2017, p. 213).

Completando na mesma página que,

“O que dizemos aqui sobre o valor de mercado se aplica ao preço de produção, tão logo ele substitua o valor de mercado. O preço de produção é regulado em cada uma das esferas e de acordo com as circunstâncias particulares. E constitui, por sua vez, o centro em torno do qual giram os preços de mercado diários, servindo de base para sua equalização em determinados períodos. (Sobre a determinação do preço de produção pelos que trabalham nas piores condições, ver Ricardo).” (MARX, 2017, p. 213).

A referência à Ricardo é interessante, pois a teoria da renda fundiária (especialmente a de tipo I) discutida na seção VI do livro III do Capital foi largamente inspirada em Ricardo. Assim, ao responder às críticas realizadas à teoria do valor de Ricardo, Marx afirma que,

“Como é Ricardo que, dando à economia política sua forma mais acabada, formulou e desenvolveu de forma mais clara a lei da determinação do valor pelo tempo de trabalho, é naturalmente sobre ele que se concentra a polêmica levantada pelos economistas.” (MARX, 1977, p. 37)

E, após enumerar as críticas em vários pontos, Marx afirma que,

“A última contradição e a mais peremptória em aparência, quando ela não é, como ordinariamente, apresentada sob a forma de exemplos barrocos, é a seguinte: se o valor de troca não é outro que o tempo de trabalho contido em uma mercadoria, como mercadorias que não contêm trabalho podem possuir um valor de troca, ou, dito de outra forma, de onde vem o valor de troca das simples forças da natureza? Este problema é resolvido na teoria da renda fundiária.” (MARX, 1977, p. 38)

O que é completado pelo próprio Ricardo, ao declarar que,

“A razão, pois, que faz aumentar o valor relativo dos produtos primários é a necessidade de se empregar mais trabalho na produção da última quantidade obtida e não a renda que se paga ao senhorio. (...) O trigo não é caro porque se paga renda e, como se acaba de observar, não haveria redução no preço do trigo mesmo que os senhorios renunciassem à totalidade das suas rendas. Tais medidas tornariam possível a alguns agricultores viver como grandes senhores mas não diminuiriam a quantidade de trabalho necessária para obter o produto em terrenos menos férteis.” (RICARDO, 1983, p. 81-82)

Diante disto, é difícil compreender como Marx não percebeu que o surgimento de rendas diferenciais implica na formação de preços que correspondem a valores marginais. Neste ponto é interessante observar que o trecho sobre o processo de trabalho, citado anteriormente, atesta que Marx tinha presente que sempre há um recurso natural na origem dos produtos gerados pelo trabalho. O que Marx parece não ter percebido é que as rendas geradas pela escassez dos recursos naturais que se encontram no início da “cadeia” produtiva de uma mercadoria sempre se repercutem sobre o seu preço, tornando-o, assim, superior ao seu valor na medida em que os recursos naturais

enquanto tais não exigem trabalho para serem gerados (como a citação de Marx deixa claro). Esta transferência de valor representada pela renda diferencial, distribuída de forma assimétrica, não pode ser captada quando o preço é definido como o valor médio.

No livro III do Capital há, portanto, uma flagrante contradição entre os processos de formação dos preços propostos nos capítulos IX e X, baseados na equalização da taxa de lucro, em relação ao processo analisado na seção VI, que implica no surgimento de rendas diferenciais. No entanto, Marx, pelo menos no momento em que redigiu o livro III, considerou que as rendas diferenciais incidem apenas no preço das mercadorias cuja produção depende diretamente de recursos naturais (o que é comumente considerado na literatura marxista). Teria Marx se dado conta dessa contradição, sendo ela um dos motivos da sua recusa em publicar os livros II e III? Teria sido este um dos motivos do seu (suposto) desejo de realizar uma análise matemática dos livros II e III? Teria Marx considerado que tal revisão, pelo menos em parte, poderia ser realizada pela aplicação do cálculo? E teria Marx intuído que tal revisão levaria a mudanças substanciais no Capital? Provavelmente, tais questões jamais poderão ser respondidas de forma conclusiva.

Em todo caso, a única forma de considerar as rendas diferenciais no processo de formação do preço de uma mercadoria é considerando o diferencial de tempo de trabalho (e não a média) por unidade de produto como o seu determinante fundamental. Em termos matemáticos este acréscimo de trabalho é calculado pela derivada do custo total, resultando no custo marginal, ou seja,

$$\frac{dc_t}{dq} = c_{mg} \quad (17)$$

Este custo marginal corresponde ao preço cuja variação em relação à quantidade produzida é mostrada na figura 2.

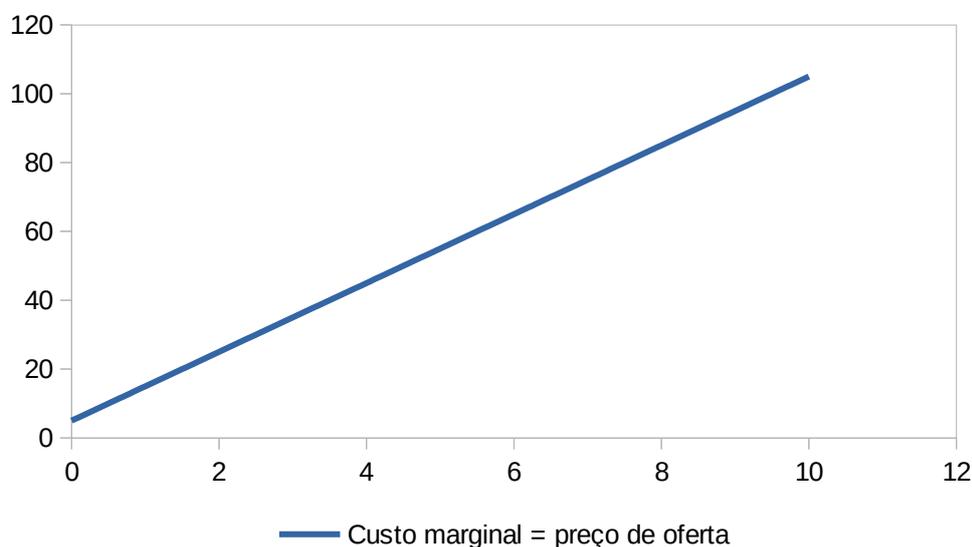


Figura 2: Preço (custo marginal) em função da quantidade produzida

Assim, considerando a curva de oferta como,

$$p = f(q) \quad (18)$$

E considerando esta função como contínua e derivável, pode-se calcular o custo de produção total ( $c_t$ ) de certa quantidade ( $q_p$ ), correspondente à área abaixo da curva, ou seja,

$$c_t = \int_0^{q_p} p \, dq \quad (19)$$

sendo, portanto, o preço ( $p$ ) obtido por,

$$p = \frac{dc_t}{dq} \quad (20)$$

obtendo-se novamente o preço a partir do custo total.

A obtenção do preço a partir do custo total mostrada na expressão 20 parece óbvia, pois, de um ponto de vista matemático, ela nada mais é do que a mesma operação efetuada anteriormente a partir da curva de custo total mostrada na expressão 17. No entanto, de um ponto de vista econômico, o custo total obtido a partir da integração da curva de preços descrita na figura 2 e da curva de custo total descrita na figura 1, de um ponto de vista qualitativo, não são os mesmos. O valor total descrito na curva de custo mostrada na figura 1 corresponde ao tempo de trabalho enquanto que a área abaixo da curva de preço corresponde a um valor monetário. Esta “transformação” de valores em preços reflete um processo em que um produto é gerado a partir de diferentes produtividades do trabalho, o qual, dada certa divisão social do trabalho, entra em um circuito de trocas, estabelecendo-se um preço, que tende a ser equivalente ao valor marginal em tempo de trabalho. Este preço, ao permitir cobrir o custo da unidade de produto que exige mais tempo de trabalho, proporciona rendas diferenciais aos produtores com maior produtividade. Neste processo não é possível a identificação pelos agentes econômicos do valor em tempo de trabalho das mercadorias, mas apenas valores monetários. O tempo de trabalho, assim, dá lugar ao preço, uma medida distinta, sobre o qual efetivamente se baseiam os agentes econômicos para a realização das trocas.

O total das rendas diferenciais pode ser determinado pelo seguinte procedimento. Denominando o preço de ( $p_p$ ), então o valor monetário total da produção ( $m_t$ ) é definido pela área do retângulo formado pela multiplicação do preço pela quantidade, ou seja,

$$m_t = p_p q_p \quad (21)$$

Neste caso, os produtores que possuem custos mais baixos geram uma renda diferencial ( $r_d$ ), correspondente à área acima da curva de oferta delimitada pelo preço, definida por,

$$r_d = \int_0^{q_p} (p_p - p) dq \quad (22)$$

o que implica que o valor monetário total da produção ( $m_t$ ) é,

$$m_t = c_t + r_d \quad (23)$$

e o custo de produção total,

$$c_t = m_t - r_d \quad (24)$$

A expressão 14 mostra que o valor monetário total ( $m_t$ ), calculado a partir dos preços, difere do custo total ( $c_t$ ), na medida em que inclui as rendas diferenciais ( $r_d$ ). A “transformação” de valores em preços, portanto, implica também em diferenças quantitativas entre ambos (exceto em condições de produção homogêneas, dificilmente observáveis).

Evidentemente, o processo descrito acima é sujeito a muitas perturbações, sendo na realidade raras as situações em que um produto é vendido a um preço único. No entanto, sua efetividade deve ser suficiente para assegurar a validade da lei do valor citada anteriormente (MARX, 2011, p. 211), na medida em que uma relação inversa entre tempo de trabalho e preços tem sido massivamente observada empiricamente (COCKSHOTT, COTTRELL e MICHELSON, 1993; COCKSHOTT, 2011).

A determinação dos preços com base no tempo de trabalho socialmente necessário discutida nos parágrafos anteriores contrasta com a vacuidade das funções de produção neoclássicas que procuram definir as curvas de oferta com base em custos monetários, pretensamente determinados pela produtividade marginal de “fatores de produção”, como o capital, o trabalho e a terra, que nada mais são do que reificações das classes sociais presentes no capitalismo. Tal vacuidade foi denunciada por Marx, ao afirmar que,

“consiste igualmente numa contradição, um círculo vicioso, do movimento efetivo, o fato que, de um lado, o preço das mercadorias determina o salário, a renda e os juros, de outro, o preço do juro, da renda e do salário determinam o preço das mercadorias.” (MARX, 1978, p. 196).

O que é completado quando, referindo-se à economia vulgar ele afirma que,

“Por isso ela não tem a mínima noção de que a trindade da qual parte – terra-renda, capital-juros, trabalho-salário ou preço do trabalho – são, *prima facie*, combinações impossíveis”. (MARX, 2017, p. 880)

Estas considerações de Marx se aplicam perfeitamente à função de produção neoclássica, a qual têm sido intensamente examinada também fora do âmbito do marxismo desde os anos 1950, quando Joan Robinson desencadeou a “controvérsia dos Cambridge”, ao afirmar que,

“A função de produção tem sido um poderoso instrumento de deseducação. O estudante de teoria econômica é ensinado a escrever  $O = f(L, C)$  onde  $L$  é uma quantidade de trabalho,  $C$  uma quantidade de capital e  $O$  a taxa de produção de commodities. Ele é instruído a assumir que todos os trabalhadores são iguais, e medir  $L$  como homens-hora de trabalho; é dito para ele alguma coisa sobre o problema do número-índice envolvido em escolher uma unidade de produto; e então ele é conduzido apressadamente para a próxima questão, na tentativa de que ele esqueça de perguntar em qual unidade  $C$  é medido. Antes mesmo que ele pergunte, ele já se tornou um professor, e assim preguiçosos hábitos de pensamento são passados de uma geração para a próxima.” (ROBINSON, 1954)

Trabalhos recentes têm aprofundado a análise da função de produção neoclássica, com resultados que deixam pouca margem a dúvidas sobre a sua total inconsistência (FELIPE, e MACCOMBIE, 2015; GUERRIEN e GUN, 2014).

Já a concepção marxista de que a curva de oferta é determinada pelo custo total em tempo de trabalho, discutida anteriormente permitem a formulação de modelos consistentes lógica e matematicamente. Isto pode ser mostrado por um modelo de programação linear, uma técnica desenvolvida no âmbito da álgebra linear, que proporciona resultados coerentes com os conceitos do cálculo. Especialmente importante neste sentido é o fato de, a partir de um problema de programação linear, denominado primal, poder ser deduzido outro problema, denominado dual, que fornece os valores equivalentes ao das derivadas parciais da função do problema primal em relação a cada uma das suas restrições. A modelagem por meio da programação linear, portanto, proporciona uma análise mais precisa da determinação dos preços, na medida em que permite a análise da formação de um conjunto de preços que condicionam-se mutuamente, assim como de todas as variáveis exógenas e endógenas que os determinam. É por esta razão que identificamos neste artigo a programação linear como uma técnica do cálculo, embora ela tenha se desenvolvido muito mais tarde que este, e mais de cinquenta anos depois da morte de Marx (KANTOROVICH, 1960). É curioso observar que esta identificação é coerente com a intuição de Marx de que a álgebra (da qual a programação linear é uma aplicação) poderia ser empregada com vantagens para o cálculo de valores diferenciais.

No modelo aqui proposto o problema primal fornece a quantidade de cada mercadoria e meio de produção a ser produzida em cada condição técnica que minimiza o trabalho socialmente necessário para a produção, sob restrições relativas à satisfação da demandada, às exigências de meios de produção e aos recursos naturais disponíveis. A partir deste problema primal obtém-se o problema dual que fornece os preços das mercadorias e dos meios de produção e as rendas diferenciais, relacionadas a cada recurso natural, que maximizam o valor agregado monetário. O modelo considera como variáveis exógenas a demanda de produtos de consumo final, os excedentes de meios de produção e o acesso aos recursos naturais, as quais são definidas pela luta de classes,

um processo social anterior aos processos econômicos propriamente ditos, que corresponde de forma precisa a concepção de Marx.

A estrutura do problema primal desse modelo é,

$$\text{Minimizar } \sum c_i^l q_i^l + \sum c_z^x k_z^x \quad (25)$$

sujeita às restrições

$$\sum q_i^l > D_i \quad (26)$$

$$\sum k_z^x - \sum a_{iz}^l q_i^l > K_z \quad (27)$$

$$\sum \sigma_{jz}^x k_z^x < R_j \quad (28)$$

onde temos,

$c_i^l$  = quantidade  $c$  de trabalho necessária por unidade do produto  $i$  com a técnica  $l$ .

$q_i^l$  = quantidade  $q$  do produto  $i$  produzido com a técnica  $l$ .

$c_z^x$  = quantidade  $c$  de trabalho necessário por unidade de meio de produção  $z$  produto com a técnica  $x$ .

$k_z^x$  = quantidade  $k$  do meio de produção (gerado pelo trabalho)  $z$  com a técnica  $x$ .

$K_z$  = quantidade excedente  $K$  do meio de produção  $z$  necessária para assegurar o aumento da produção futura.

$a_{iz}^l$  = quantidade  $a$  do meio de produção  $z$  necessária para a produção de uma unidade do produto  $i$  com a técnica  $l$ .

$D_i$  = quantidade demandada  $D$  de produto  $i$ .

$\sigma_{jz}^x$  = quantidade  $\sigma$  de recurso natural  $j$  necessário para a produção do meio de produção  $z$  com a técnica  $x$ .

$R_j$  = quantidade máxima  $R$  a ser utilizada do recurso natural  $j$ .

O problema dual é formulado como,

$$\text{Maximizar } \sum p_i D_i + \sum \beta_z K_z - \sum r_j R_j \quad (29)$$

sujeita à restrição

$$p_i - \sum a_{iz}^l \beta_z < c_i^l \quad (30)$$

$$\beta_z - \sum \sigma_{jz}^x r_j \leq c_z^x \quad (31)$$

onde, além das variáveis do problema primal, já descritas, temos,

$p_i$  = preço  $p$  do produto  $i$ .

$\beta_z$  = preço  $\beta$  do meio de produção (gerado pelo trabalho)  $z$ .

$r_j$  = preço  $r$  do recurso natural  $j$ .

De acordo com o teorema da dualidade, com as soluções ótimas temos,

$$\text{mínimo } \sum c_i^l q_i^l + \sum c_z^x k_z^x = \text{máximo } \sum p_i D_i + \sum \beta_z K_z - \sum r_j R_j \quad (32)$$

ou seja, o mínimo de trabalho socialmente necessário (valor em tempo de trabalho) para satisfazer as demandas dos produtos, dadas as exigências de excedentes de meios de produção, as condições de produção vigentes e certa disponibilidade de recursos naturais, corresponde ao máximo valor agregado monetário, consideradas as condições de produção.

Observa-se que a expressão 32 descreve que o valor total em tempo de trabalho é equivalente ao valor monetário total subtraído das rendas, o que corresponde exatamente ao que é descrito pela expressão 24, formulada na primeira seção. Isto demonstra que o modelo de programação linear descreve formalmente os determinantes da oferta tal como eles foram discutidos no início desta seção a partir do cálculo diferencial e integral. Também, na medida em que as variáveis do problema dual que expressam os preços correspondem à variação do valor da função objetivo do problema primal provocada pela variação dos coeficientes do lado direito das suas restrições, os preços definidos pelo modelo correspondem a valores marginais.

O modelo apresentado acima permite tornar ainda mais clara a distinção entre valores em tempo de trabalho e preços o que, talvez, teria evitado a Marx, ao procurar a diferença entre valores e preços no processo de equalização das taxas de lucro, declarar que,

“De início, supúnhamos que o preço de custo de uma mercadoria era igual ao valor das mercadorias consumidas em sua produção. Para o comprador, no entanto, o preço de produção de uma mercadoria é o preço de custo desta última e, por isso, pode entrar como preço de custo na formação do preço da outra mercadoria. Como o preço de produção pode divergir do valor da mercadoria, também, o preço de custo de uma mercadoria, no qual está incluído esse preço de produção de outra mercadoria, pode situar-se acima ou abaixo da parte de seu valor total constituída pelo valor dos meios de produção que entram nela. É necessário ter em mente esse significado modificado do preço de custo e não esquecer, portanto, que, se numa esfera da produção o preço de custo é equiparado ao valor dos meios de produção consumidos para produzi-la, é sempre possível haver erro. Para nossa presente investigação, não é preciso detalhar esse ponto.” (MARX, 2017, p. 138)

Esta declaração de Marx foi intensamente explorada para a crítica da sua teoria do valor (HARRIBEY, 2013, p. 94). No entanto, a diferença entre valores e preços, de acordo com o modelo proposto, é anterior à equalização das taxas de lucro. Ela se deve ao surgimento de rendas provocadas pela escassez de recursos naturais (ou outra fonte permanente de diversidade das condições de produção) que se adicionam aos preços das mercadorias ao longo da cadeia de produção, conforme mostra as expressões 30 e 31.

O modelo apresentado também permite explicitar com maior clareza as diferenças qualitativas entre valores e preços. De acordo com o teorema fundamental da programação linear o número de variáveis da base ótima é igual ao número de restrições ativas do problema (BOLDRINI et al., 1980, p. 369). Como as colunas do problema primal correspondem às restrições do problema dual, isto implica que as condições de produção que compõem a base ótima do problema primal são as que definem os preços no problema dual. Os preços assim determinados fazem com que nas restrições ativas do problema dual que não incluem a utilização direta de recursos naturais (nas quais o valor agregado corresponde às variáveis “c” do lado direito da expressão 30), o valor agregado corresponderá ao valor em tempo de trabalho (mas não os preços, pois nestes estão incluídas as rendas), desde que a produção ocorra nas condições definidas pela expressão 32.

Portanto, a expressão 30 descrita no problema dual, macroeconômico, de formação de preços, é a mesma empregada para, microeconomicamente, calcular o valor agregado nas unidades de produção, bastando para isto nelas considerar as quantidades do produto. Desta forma, o valor agregado pode ser calculado a partir de um valor monetário obtido por meio da multiplicação do preço pela produção, dele subtraindo o valor monetário dos meios de produção, obtido pela sua quantidade multiplicada pelo preço, ou seja,

$$VA = Q p_i - Q \sum a_{iz}^l \beta_z \quad (33)$$

No entanto, como já mencionado, apenas preços cuja formação respeita as condições mostradas na expressão 32, podem induzir os produtores a escolher técnicas (e, de forma geral, condições de produção) coerentes com a satisfação da demanda, nas condições técnicas vigentes e com os recursos naturais disponíveis. É por esta razão que tais preços, e as técnicas que eles induzem a escolher, são denominados “eficientes”. Apenas preços assim formados podem assegurar que o valor agregado seja quantitativamente (mas não qualitativamente) correspondente ao tempo de trabalho. Isto porque, se não forem aplicadas técnicas eficientes o valor agregado será menor do que o tempo de trabalho aplicado diretamente pelo produtor (o que caracteriza sua produção como socialmente não necessária). No caso de produtos que, para serem gerados, exigem diretamente recursos naturais, as rendas diferenciais surgidas no caso de escassez se adicionam ao valor agregado.

Mas quando as decisões dos produtores são tomadas com base na maximização da taxa de lucro, a coerência entre as condições (e as técnicas a elas correspondentes) de produção e a minimização do tempo de trabalho não pode ser assegurada. Isto porque a taxa de lucro é inversamente proporcional à proporção entre o valor dos meios de produção físicos (capital constante) e o dos salários (capital variável), ou seja, da composição orgânica do capital, não

guardando uma relação direta com o valor agregado em termos absolutos. Os capitalistas, assim, podem maximizar sua taxa de lucro escolhendo técnicas que utilizam menos meios de produção, mesmo que estas proporcionem um menor valor agregado. Além disto, a taxa de lucro pode ser aumentada por uma repartição do valor agregado mais favorável ao capitalista, isto é, pelo aumento da mais valia absoluta. A adoção da taxa de lucro como critério de decisão nas unidades de produção possui, portanto, um caráter perturbador no processo de formação dos preços e, portanto, na coerência entre os processos macro e microeconômicos de alocação de recursos na sociedade. Estes resultados demonstram que a adoção do cálculo diferencial (em seu sentido amplo), não implica em qualquer convergência com as concepções neoclássicas que procuram consagrar o lucro como o único critério de decisão que permitiria a escolha de técnicas adequadas para a satisfação da demanda, e menos ainda que levaria a uma otimização da alocação dos recursos. Além disto, tem sido evidenciado (SILVA NETO, 2018) que a consideração das rendas diferenciais no processo de formação dos preços, tal como realizada neste trabalho, permite que o problema da escassez possa ser analisado, de forma clara e rigorosa, de acordo com o pensamento de Marx, o que pode trazer importantes subsídios para o enfrentamento das ameaças à sustentabilidade ambiental das sociedades contemporâneas.

## **Conclusões**

Os resultados obtidos neste trabalho permitem concluir que a aplicação de técnicas relacionadas ao cálculo diferencial e integral não implica necessariamente em promover qualquer tipo de convergência entre o pensamento de Marx e as concepções neoclássicas. Ao contrário, os resultados obtidos tenderam claramente a reforçar o sentido crítico da obra de Marx em relação ao capitalismo, inclusive no que diz respeito à reificação das relações sociais pela economia neoclássica, cujos precursores Marx denominava economistas vulgares.

É interessante observar que as intuições de Marx sobre os fundamentos do cálculo, segundo as quais este deveria se basear na álgebra e não em infinitesimais, mostraram-se bastante justas. Evidentemente, isto não implica que o cálculo baseado em infinitesimais (ou seja, o cálculo propriamente dito) apresente qualquer problema de fundamentação. O que torna interessante a intuição de Marx é que, como mostrado no artigo, a aplicação da programação linear, técnica desenvolvida no âmbito da álgebra, permitiu explicitar importantes aspectos da formação dos preços, os quais são difíceis de serem detectados apenas a partir do cálculo infinitesimal, mesmo quando ilustrado geometricamente.

Por outro lado, os resultados apresentados neste artigo indicam a necessidade de uma substancial reavaliação da abordagem dos processos de formação dos preços empregada por Marx

no livro III do Capital. A análise desses processos realizada neste artigo, embora esteja em conformidade com a lei do valor enunciada por Marx, indica que a equalização das taxas de lucro exerce uma influência perturbadora, de natureza endógena, sobre o sistema econômico, na medida em que impossibilita a formação de preços eficientes, dadas as condições técnicas de produção e a disponibilidade dos recursos naturais. Isto impossibilita a consideração da equalização das taxas de lucro como o determinante de uma tendência do sistema capitalista a um estado bem definido e estável, o que, porém, não impede certa previsibilidade do padrão de comportamento das economias capitalistas, de acordo com o seu contexto histórico. Neste sentido, os resultados obtidos neste trabalho indicam que as economias capitalistas podem exibir um comportamento compatível com os descritos teoricamente em estudos sobre sistemas complexos (NICOLIS e PRIGOGINE, 1989). cremos que Marx não discordaria desta concepção.

### Referências

- ALCOUFFE A. **Les manuscrits mathématiques de Karl Marx**. Paris: Economica, 1985.
- BOLDRINI, J. L., COSTA, S. I. R., FIGUEIREDO, V. L. e WETZLER, H. G. **Algebra Linear**. 3ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.
- COCKSHOTT P. W., COTTRELL, A.; MICHAELSON, G. J. **Testing Labour Value Theory with input/output tables**. Department of Computer Science, University of Strathclyde, 1993 (disponível em <http://www.helmutdunkhase.de/marx-ts.pdf>)
- COCKSHOTT, P. W. Competing theories: Wrong or Not Even Wrong? **Vlaams Marxistisch Tijdschrift**, 45(2): 97-103, 2011.
- FELIPE, J.; MACCOMBIE, J.S.L. The Aggregate Production Function: ‘Not Even Wrong’. **Review of Political Economy**, 26(1), p. 60-84, 2015.
- GRANDE, R. M.; SMILGYS, T. H. Dialética e Matemática em Marx. In: RICARDO SCUCUGLIA R. DA SILVA (Org.). **Dialética e Matemática em Marx**. 1ed. Porto Alegre: Editora Fi, , v. 1, p. 67-94, 2018.
- GUERRIEN, B.; GUN, O. En finir, pour toujours, avec la fonction de production agrégée? Jesus Felipe and John S.L. MacCombie, The Aggregate Production Function: ‘Not Even Wrong’. **Revue de la regulation** [En ligne], n° 15, juin 2014, consultado em 20 de abril de 2017, URL: <https://regulation.revues.org/10802>
- HAGENDORF, K., A Critique of Gossen's Fundamental Theorem of the Theory of Pleasure, 2010. Disponível em SSRN: <https://ssrn.com/abstract=1615522> ou <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1615522>
- HAGENDORF, K., The Labour Theory of Value: A Marginal Analysis (March 27, 2014). Disponível em SSRN: <https://ssrn.com/abstract=1958566> ou <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1958566>

- HARRIBEY, J.-M., **La richesse, la valeur et l'inestimable. Fondements d'une critique socio-écologique de l'économie capitaliste.** Paris: Les Liens qui Libèrent, 2013.
- HOWARD, N. **Marx's Theory of Price and its Moderns Rivals.** New York: Palgrave Macmillan, 2011.
- HUSSON, M. **La transformation de valeurs em prix. Contre Sraffa.** Auto-édition, 2014 (disponível em <http://hussonet.free.fr/bib82.pdf>).
- JEVONS, S. **The theory of Political Economy.** New York: Augustus M. Keller, Bookseller (Reprints of economic classics), 2ed. 1879.
- KANTOROVICH, L. Mathematical Methods of Organizing and Planning Production **Management Science**, Vol. 6, No. 4 Jul. 1960, pp. 366-422.
- KOLMAN, E. e YANOVSKAYA, S. Hegel e Matemática. Manuscritos Matemáticos de Marx, New Park Publications, 1931 ( URL: <https://www.marxists.org/portugues/kolman/1931/mes/hegel.htm> , acessado em 13 de outubro de 2019).
- MARX, K. **Contribution à la critique de l'économie politique.** Paris: Ed. Sociales, 1977.
- MARX, K. O rendimento e suas fontes – A economia vulgar. In MARX, K. **Manuscritos econômico-filosóficos e outros textos escolhidos.** (Coleção Os Pensadores, seleção de textos de José Arthur Giannotti), São Paulo: Abril Cultural, 1978 [1862].
- MARX, K. Sur le concept de fonction derivée. In ALCOUFFE A. **Les manuscrits mathématiques de Karl Marx.** Paris: Economica, p. 115-123, 1985.
- MARX, K. **O Capital**, Livro I, Capítulo XX. São Paulo: Boitempo, 2011 [1867].
- MARX, K. **O Capital**, Livro III, Capítulo XX. São Paulo: Boitempo, 2017 [1894].
- MORISHIMA, M. **Marx's Economics. A Dual Theory of Value and Growth.** Cambridge: University Press, 1973.
- NICOLIS, G.; PRIGOGINE, I. **Exploring Complexity. An introduction.** New York: Freeman and Company, 1989.
- RICARDO, D. **Princípios de economia política e de tributação.** 3ª Ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1983.
- ROBINSON, J. The Production Function and the Theory of Capital. **Review of Economic Studies**, 21(2), 1953-1954, p. 81-106.
- SERMAN, P. Karl Marx et le calcul infinitésimal. **REPERES IREM**, n. 91, p. 93-103, abril 2013.
- SILVA NETO, B. A importância das rendas diferenciais na teoria dos preços de Marx. **Desenvolvimento em Questão**, ano 16, número 44, , p. 9-41, jul/set 2018.
- SMOLINSKI, L. Karl Marx and mathematical economics. *Journal of Political Economy*, vol. 81, n. 5, 1973.

SRAFFA, P. **Production of commodities y means of commodities. Prelude to a critique of economic theory.** Bombay: Vora & Publishers PVT. Ltd., 1963 [1960].

STIGLITZ. J. E.; WALSH, C. E. **Introdução à Microeconomia.** Rio de Janeiro: Ed. Campus, 2003, p. 171-174.

Documento de trabalho